SESIÓN 8

MAXIMOS Y MÍNIMOS DE UNA FUNCION, APLICACIONES DE LOS MAXIMOS Y MINIMOS

I. CONTENIDOS:
1. Máximos y mínimos de una función (definiciones)
2. Máximos y mínimos (metodología de cálculo)
3. Ejercicios de aplicación resueltos

II. OBJETIVOS:
Al término de la Clase, el alumno:
- Comprenderá lo que es un máximo y un mínimo
- Entenderá su metodología de cálculo
- Resolverá problemas donde intervengan máximos y mínimos

III. PROBLEMATIZACIÓN:
Comenta las preguntas con tu Asesor y selecciona las ideas más significativas
- ¿A que nos referimos cuando decimos que en una función hay un máximo o un mínimo?
- ¿Cómo es que por medio de la aplicación de los máximos y mínimos podemos optimizar el uso de un recurso?

IV. TEXTO INFORMATIVO-FORMATIVO:

1.1. Máximos y mínimos de una función (definiciones)

Decimos que el valor de una función es un *máximo* en caso de que este sea *mayor* que cualquiera de los valores que le anteceden o le preceden inmediatamente.
Con el propósito de precisar lo anterior analicemos la fig., siguiente:

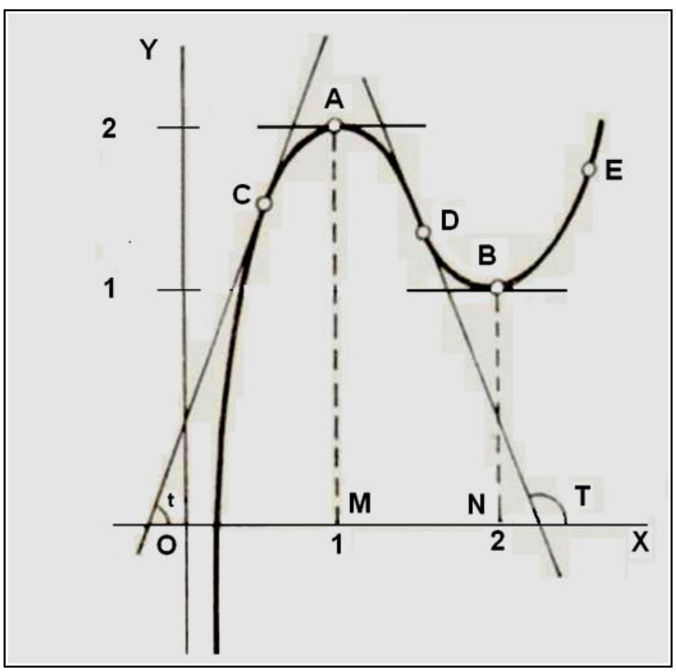

Fig. 1

Por inspección podemos determinar que la función tiene un valor máximo $MA = y = 2$ cuando $x = 1$, y un valor mínimo $NB = y = 1$ cuando $x = 2$.

Es muy importante que hagamos la siguiente observación, un máximo, así definido, *no significa necesariamente, que sea el mayor valor posible de una función*, tampoco que un *mínimo sea el menor valor de todos en una función considerada*, es por esto que algunos autores les llaman máximos y mínimos *relativos.*

Si analizamos con cuidado la fig. podemos entender claramente estos conceptos, así podemos ver que la función y tiene valores a la derecha de B que son myores que el máximo MA, y valores a la izquierda de A que son menores que el mínimo NB.

En el caso que $f(x)$ sea una función creciente de x cuando esta es ligeramente menor que M, perp es una función decreciente de x cuando esta es ligeramente mayor que M, es decir, si $\frac{dy}{dx}$ cambia de signo pasando de $(+)$ a $(-)$ al aumentar x, entonces $f(x)$ tiene un máximo cuando $x = M$ y $\frac{dy}{dx}$ se anula cuando $x = M$, esto es porque el valor de la tangente en ese punto es cero, ya que forma un ángulo de cero grados con el eje OX.

Por lo anteriormente explicado y retomando la fig. del ejemplo, vemos que en el punto C, $\frac{dy}{dx}$ es positiva, en el punto A, $\frac{dy}{dx} = 0$; en el punto D $\frac{dy}{dx}$ es nagativa.

Por otro lado, si $f(x)$ es una función decreciente cuando x es ligeramente menor que M, pero es una función creciente cuando x es ligeramente mayor que M; es decir, si $\frac{dy}{dx}$ sufre un cambio de signos pasando de $(-)$ a $(+)$ al aumentar x, entonces $f(x)$ tiene un mínimo cuando $x = M$,

En el punto D, $\frac{dy}{dx}$ es negativa, en B, $\frac{dy}{dx} = 0$; en el punto E, $\frac{dy}{dx}$ es positiva.

Una vez que hemos comprendido lo anterior es fácil formular las condiciones generales que rigen a los máximos y mínimos.de una función $f(x)$:

1. La función $f(x)$ tiene un máximo si $\frac{dy}{dx} = 0$ y cambia de signo, pasando de $+$ a $-$.

2. La función $f(x)$ tiene un mínimo si $\frac{dy}{dx} = 0$ y cambia de signo, pasando de $-$ a $+$.

A los valores que satisfacen a la ecuación $\frac{dy}{dx} = 0$ se les conoce como ***valores críticos***

De esta manera, los **valores críticos** para la función que describe a la curva anterior son $x = 1$ y $x = 2$, estos valores críticos nos determinan ***puntos de cambio*** donde la tangente es paralela al eje OX, es decir, en el punto donde el ángulo es igual a cero grados con respecto a este eje.

Para conocer el signo que tiene la primera derivada ($\frac{dy}{dx}$) en puntos cercanos respecto a un punto de cambio, basta sustituir en la derivada inicialmente un valor de la variable ligeramente menor que el valor crítico, en seguida un valor ligeramente mayor a este, en el caso que el primer signo de la derivada es $+$ y el segundo $-$ entonces la función tiene un máximo para el valor crítico considerado, en el caso que el primer signo sea $-$ y el segundo sea $+$ entonces la función tiene un mínimo. Si no hay cambio de signos al hacer las operaciones anteriores, entonces la función no tiene ni máximo ni mínimo para el valor crítico considerado.

2.1. Máximos y mínimos (metodología de cálculo)

a) Método de la primera derivada:
Primer paso: Obténgase la primera derivada de la función.

Segundo paso: Una vez hallada la primera derivada de la función esta se iguala a cero, y se calculan las raíces reales de la ecuación que resulta. Estas raíces son los valores críticos de la variable.

Tercer paso: Considere los valores críticos uno a uno, y se determinan los signos de la primera derivada, primero para un valor un poco menor que el valor crítico y después para un valor un poco mayor para el mismo. Si el signo de la derivada en primer lugar es $+$ y después$-$, la función tiene un máximo para este valor crítico de la variable, en el caso contrario tendrá un valor mínimo. En el caso que no haya cambio de signos, la función no tiene ni máximo ni mínimo para el valor crítico que se consideró.

Es muy común que en el tercer paso la ecuación que resulta de la primera derivada se resuelva mediante una factorización, es conveniente que el estudiante repase esta técnica en un tratado de álgebra.

3.1. Ejercicios de aplicación resueltos

1. Calcular los máximos y mínimos relativos de la función: $y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$
Paso uno: Calculamos la derivada de la función:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(3x^4 - 4x^3 - 12x^2) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$$

Paso dos: Se iguala la derivada a cero y se resuelve la ecuación resultante

$12x^3 - 12x^2 - 24x = 0$ Dividamos entre 12 para simplificar

$x^3 - x^2 - 2x = 0$ Factorizando por factor común nos queda

$x(x^2 - x - 2) = 0$ Factorizando la ecuación de segundo grado nos queda

$x(x-2)(x-1) = 0$ Igualando a cero la primer x

$x_1 = 0$ Que es la primer raìz real o punto crítico

$x - 2 = 0 \quad \therefore \quad x = 2$ Que es la segunda raíz real o punto crítico

$x - 1 = 0 \quad \therefore \quad x = 1$ Que es la tercera raíz real o punto crítico

Tercer paso: Analicemos los valores críticos uno a uno

Para $x = 0$ Tomemos un valor un poco menor de cero como $x = -0.5$ y sustituyamos en la derivada, tenemos $\frac{dy}{dx} = -(0.5)^3 - (-0.5)^2 - 2(-0.5) = -0.125 - 0.25 + 1 = +0.625$. La curva en este punto es crecente. Para el mismo valor de x pero ahora tomemos un valor un poco mayor, digamos $x = 0.5$ y sustituyamos en la derivada, tenemos $\frac{dy}{dx} = (0.5)^3 - (0.5)^2 - 2(0.5) = 0.125 - 0.25 - 1 = -1.125.$ La curva en este punto es decreciente. Como la derivada cambio de (+) a (-) tenemos un máximo en este intervalo.

Analicemos ahora la siguiente raíz $x = 2$. Tomemos ahora un valor un poco menor de dos, hagamos $x = 1.5$ y sustituyamos en la derivada $\frac{dy}{dx} = x^3 - x^2 - 2x = (1.5)^3 - (1.5)^2 - 2(1.5) = 3.375 - 2.25 - 3 = -1.875$. En este punto la curva es decreciente en este punto.

Tomemos ahora un valor un poco mayor de dos, hagamos $x = 2.5$ y sustituyamos en la derivada $\frac{dy}{dx} = x^3 - x^2 - 2x = (2.5)^3 - (2.5)^2 - 2(2.5) = 15.625 - 6.25 - 5 = +4.375$. La curva en este punto es creciente. Como derivada cambió de (-) a (+) tenemos un mínimo en este intervalo. Ahora analicemos la siguiente raíz $x = -1$. Tomemos un valor un poco menor a -1 como $x = -1.5$. Sustituyendo en la derivada tenemos $\frac{dy}{dx} = x^3 - x^2 - 2x = (-1.5)^3 - (-1.5)^2 - 2(-2.5) = -3.375 - 2.25 + 3 = -2.625$ La curva en este punto es decreciente.

Tomemos ahora un valor un poco mayor a 1.5, digamos $x = -0.5$ y sustituyamos en la derivada

$\frac{dy}{dx} = x^3 - x^2 - 2x = (-0.5)^3 - (-0.5)^2 - 2(-0.5) = -0.125 - 0.25 + 1 = 0.625$ La curva en este punto es creciente

Como la derivada cambió de (-) a (+) tenemos un mínimo en este intervalo. Procedamos ahora al trazo de la gráfica y comparémosla con nuestros resultados.

x	y
0	0
1	-13
2	-32
3	243
-1	-5
-2	32
-3	243

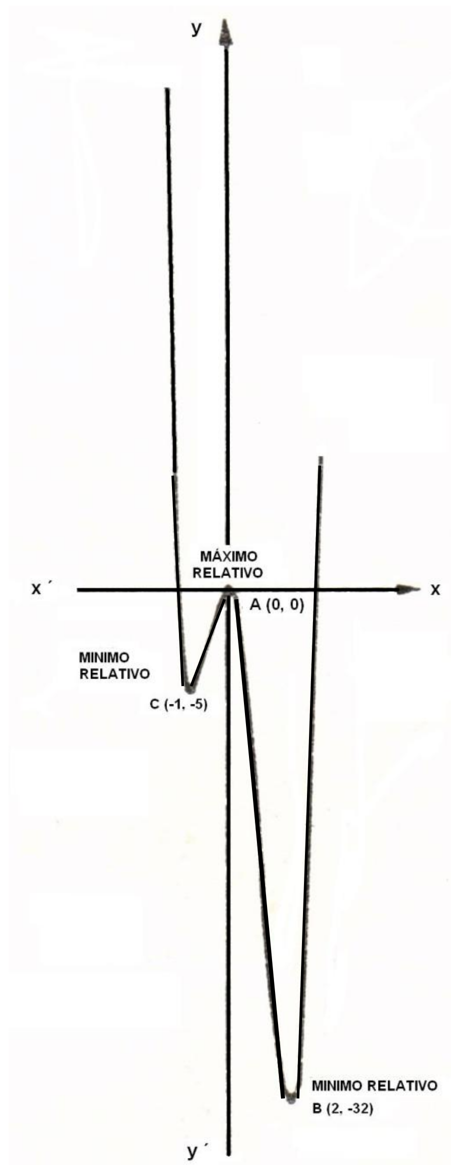

Fig. 2

2. Encuentre dos números cuya suma es 120 de tal manera que el producto (P) de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo

Solución:
Designemos con una x al primer número buscado. Designemos con y al segundo número buscado. Por condición de problema $P = yx^2 = 120$ Obtenemos una ecuación con dos incógnitas, por lo que es necesario poner una de las incógnitas en función de la otra, de tal manera que tengamos una ecuación con una sola incógnita, por condición del problema $x + y = 120$ de aquí que podemos despejar y y expresarla en función de x, entonces $y = 120 - x$ por lo tanto sustituyendo en la primera ecuación planteada tenemos $P = (120 - x)x^2$ derivando con respecto x tenemos $\frac{dP}{dx} = \frac{d}{dx}(120 - x)x^2 = 3x(80 - x)$ Igualando a cero y resolviendo la ecuación resultante los valores críticos son $x = 0$, $x = 80$.
Como $x = 0$ no tiene sentido entonces los números pedidos son: $x = 80$ y sustituyendo. En la segunda ecuación planteada $y = 120 - x = 120 - 80 = 40$ que son los números buscados. Se deja al estudiante la comprobación como ejercicio

3. Se desea construir un recipiente de aluminio de base cuadrada cuya capacidad sea de 108 cm cúbicos. La parte superior del recipiente debe ser abierta. Calcule las dimensiones que debe tener el recipiente de tal manera que la cantidad de material empleada en su construcción sea mínima.

Designemos con x a la longitud de los lados de la base cuadrada. Designemos con y a la longitud de altura de la caja. El volumen de la caja será entonces $V = x^2y$ como vemos tenemos una ecuación con dos.

Variables, por lo que es necesario poner a y en función de x entonces tenemos $y = \frac{108}{x^2}$ de esta manera podemos expresar en función de x el total de material en en cm^2 el área de las cuatro caras laterales es $= 4\,xy = \frac{432}{x}$ en tonces el total de material será $M = x^2 + \frac{432}{x}$ derivando respecto a M tenemos $\frac{dM}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 + \frac{432}{x})= 2x - \frac{432}{x^2}$ igualando a cero esta ecuación: $2x - \frac{432}{x^2} = 0$ resolviendo nos resulta $x = 6$ cm que es la menor cantidad de material posible.